5Л

УДК 517.928.4, 330.4, 336

А.К. Лопатин, К.С. Евдокимов
Национальная академия управления, г. Киев, Украина
a_lopatin@ipnet.kiev.ua, oliapka@bigmir.net

Применение R/S анализа для исследования детерминированного хаоса на примере возмущенного осциллятора Ван дер Поля

Исследование базируется на применении R/S анализа для численного решения уравнения Ван дер Поля для изучения фундаментальных свойств сложных экономических систем, которые демонстрируют многомасштабное и мультистабильное поведение, а также сосуществование порядка и хаоса в зависимости от изменения управляющего параметра. Основной акцент в работе делается на изучение поведения показателя Херста при различных хаотических режимах и горизонтах инвестирования. Изучены возможности R/S анализа для распознавания характера поведения системы.

Введение

Целью данного исследования является определение динамики изменения первого и второго показателя Херста при переходах между хаотическими и периодическими режимами решения уравнения Ван дер Поля, а также изменением горизонта инвестирования (укрупнении выборки); определение закономерности такого изменения для использования как дополнительного фактора при идентификации режима функционирования исследуемой системы по временному ряду.

Описание сложной динамики экономических циклов путем выявления регулярных и нерегулярных моделей поведения и режимов переключения между различными динамическими фазами в экономических временных рядах является ключом к улучшению экономического прогнозирования. Статистический анализ фондовых рынков и валютных рынков продемонстрировал перемежающийся характер нелинейных экономических временных рядов, которые показывают негауссовское поведение в функции распределения вероятности изменения цен и степенную зависимость от частоты в спектральной плотности. Нелинейные детерминированные модели экономической динамики способны моделировать перемежающие временные ряды, которые показывают переход от порядка к хаосу, или от слабого хаоса к сильному хаосу, что может объяснить происхождение и природу перемежаемости, наблюдаемой в экономических системах. В данной работе основным методом исследования является метод R/S Херста.

Осциллятор Ван дер Поля. Основные свойства

Рассмотрим поведение численного решения возмущенного уравнения Ван дер Поля, которое, как показано в работе [1], является модельным примером поведения бизнес циклов:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = a\sin(\omega t).$$

Данное уравнение – пример двух связанных осцилляторов: внутреннего нелинейного осциллятора с собственной частотой и внешнего периодического осциллятора с движущей частотой ω. В нелинейной системе частота колебаний изменяется от из-

менения управляющих параметров, следовательно, в динамической экономической модели поведение нелинейных бизнес-циклов зависит от взаимодействия между этими двумя частотами под воздействием управляющего параметра.

При отсутствии внешнего воздействия (a = 0) начало координат $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ является единственным решением и образует неустойчивую неподвижную точку; все остальные траектории системы стремятся к единственной орбите (предельному циклу), окружающей начало координат (Аллайгед, Sauer и Yorke, 1996). В присутствии экзогенного воздействия, уравнение допускает богатое разнообразие периодических и апериодических колебаний при изменении параметров μ, ω и a. Parlitz и Lauterborn (1987) привели примеры бифуркационных диаграмм уравнения путем изменения частоты w и амплитуды a, которые показывают режим синхронизации и удвоения периода. Они отметили, что симметричность осциллятора Ван дер Поля приводит к сосуществованию двух асимметричных аттракторов. При больших амплитудах внешнего воздействия много периодических, апериодических и хаотических аттракторов сосуществуют вместе.

Свое исследование мы сосредоточим на влиянии изменения параметра *a,* при постоянных значениях параметра $\mu = 1$ и $w = 0.45$ и начальных условиях (1,1) или (1,–1). На рис. 1 показаны глобальные бифуркационные диаграммы для уравнения Ван дер Поля при симметричных начальных условиях.

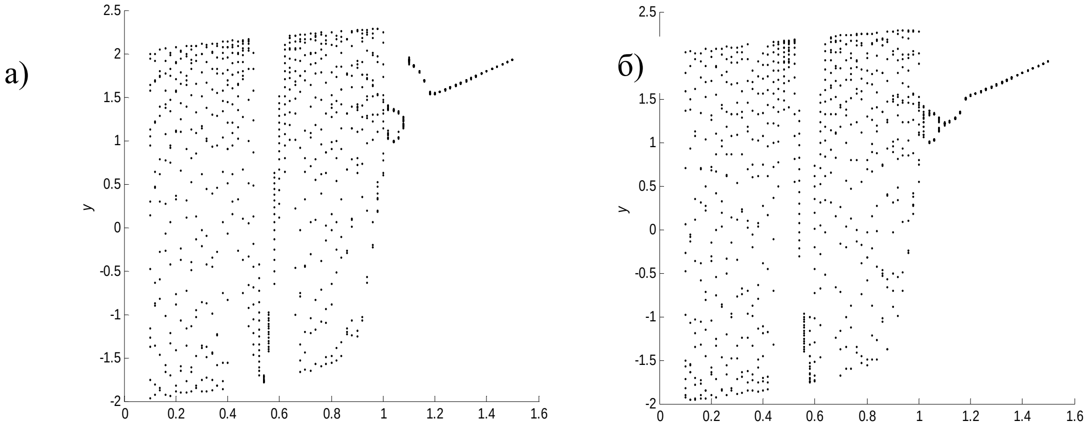


Рисунок 1 – Бифуркационная диаграмма для уравнения Ван дер Поля при изменении *a* от 0,1 до 1,5 для начальных условий а) (1,1) б) (1,–1)

Наиболее интересным для исследования является промежуток при *a = 0,9* до *a = 1,1*. Ему будет посвящена большая часть исследования данного уравнения.

Применение R/S анализа

1 Периодический режим и переход к хаосу через слияние аттракторов

Даный промежуток охватывает значения управляющего параметра *a* от 0,9831 до 0,988. Имеется два аттрактора на этом промежутке .

Рассмотрим поведение показателя Херста вблизи точки бифуркации типа «седло – узел». Справа временной ряд периодический, и соответвующий ему показатель Херста равняется H1 = 1,01 (рис. 2), что свидетельствует об абсолютной трендоустойчивости ряда, чего и следовало ожидать от периодического временного ряда. Вторым показателем Херста будем называть показатель Херста, построенный по точкам, которые следуют после «срыва» основного тренда и закачиваются «срывом» второго тренда.

Поведение обоих показателей Херста отличается стабильностью на периодическом промежутке с незначительным уменьшением для H_1 и более значительным падением второго показателя Херста (H_2) при приближении системы к хаотическому режиму (a = 0,988) (рис. 2).

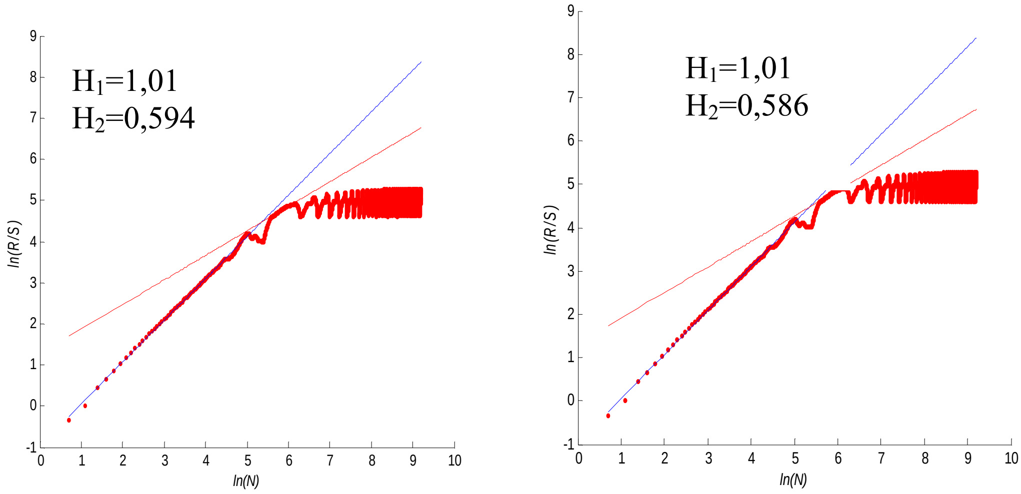


Рисунок 2 – Показатель Херста для a = 0,984 и a = 0,985

Рассмотрим изменение показателя Херста в периодическом режиме при укрупнении горизонта инвестирования в 5, 10, 20 и 60 раз. Если наблюдения рассматриваемой системы производятся каждые сутки, то данное разбиение отвечает недели, двум неделям, месяцу и кварталу. Подразумевается, что в расчет берутся только рабочие дни: в выходные дни экономические показатели не снимаются. Анализ графиков (рис. 3) показывает, что укрупнение практически не меняет первый показатель Херста (на графике отсутствует) и немного увеличивает второй. Данная тенденция сохраняется и для большей степени укрупнения.

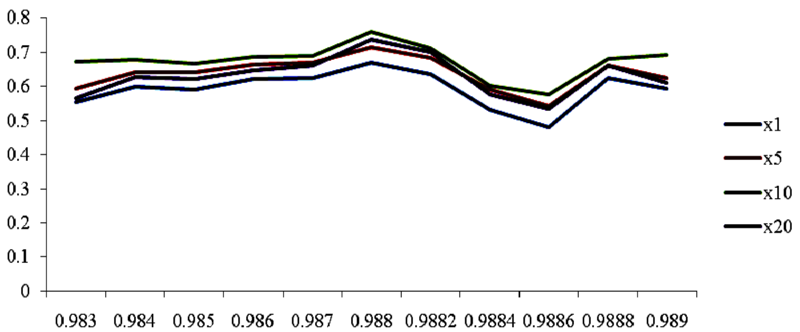


Рисунок 3 – Изменение второго показателя Херста в зависимости от параметра *a* и степени укрупнения данных

При достаточно большом укрупнении данных уже невозможно получить информацию о поведении системы и её анализ становится крайне затруднительным. Это показано на рис. 4 в): показатель Херста становится значительно меньше 0,5, что говорит о сильной антиперсистентности ряда и его нетрендоустойчивости. Напомним, что изначально мы рассматриваем периодическую систему, первый показатель Херста которой равен 1.

Данный анализ показывает необходимость учитывать особенности системы при дискретном съеме её показателей. При определенной маленькой частоте съема информация о системе теряется, и её анализ R/S методом становится невозможным.

2 Хаотический режим до локальной бифуркации типа «седло – узел» (а < a_{snb} = 0,98312)

Проведем аналогичное исследование показателя Херста для данной системы в хаотическом режиме до локальной бифуркации типа «седло – узел».

а)

б)

в)

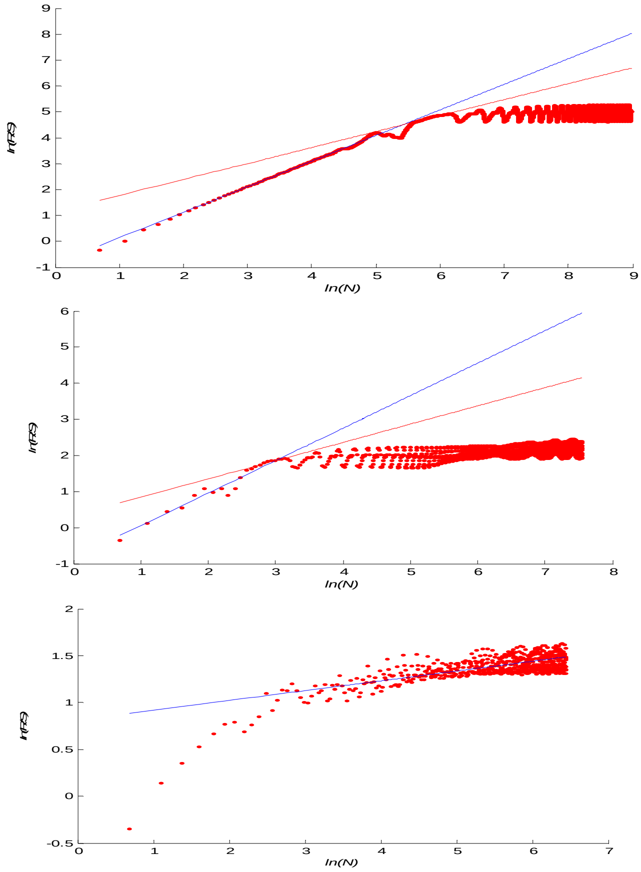


Рисунок 4 – Показатель Херста при а = 0,984 и укрупнении данных
а) в 1 раз б) в 20 раз в) в 60 раз

График R/S анализа очень похож на график для периодической функции, но решение системы не является периодическим. В данном случае показатель Херста отображает непериодический цикл, который не имеет частоты; он имеет только среднюю частоту, которую и показывает анализ.

При укрупнении в 60 раз степень хаотичности системы отыгрывает значительную роль. Редкая выборка из хаотической детерминированной системы является антиперсистентным временным рядом, поведение которого в значительной степени зависит от характера и степени хаотичности.

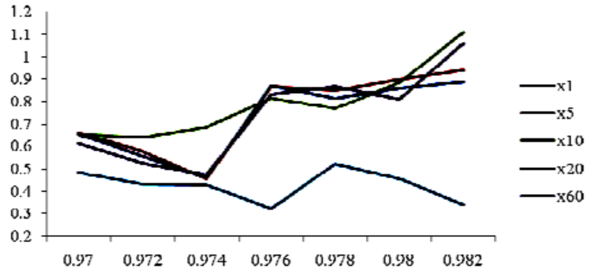


Рисунок 5 – Изменение второго показателя Херста в зависимости от параметра *а* и степени укрупнения данных

Из рис. 5 четко просматривается тенденция увеличения второго показателя Херста при приближении к точке локальной бифуркации типа «седло-узел». Из этого можно сделать вывод, что второй показатель Херста увеличивается при приближении к порядку и становится меньше при приближении к хаосу. При хаотическом режиме влияние разреживания данных (укрупнения горизонта инвестирования) носит менее значительный характер на показатель Херста, т.е. применяя метод R/S анализа, еще удается узнать о характере поведения системы.

3 Слияние аттракторов и последующее поведение системы ($a>a_{мс} = 0,98765$)

При удалении от точки слияния аттракторов второй показатель Херста уменьшается, переходя в горизонтальную линию уже при a = 0,992. Это означает, что система теряет память о периодическом режиме, и остается только средний период системы, отображаемый срывом тренда первого показателя Херста. Значение, близкое к 1 говорит о детерменированной природе хаотического режима.

При дальнейшем увеличении параметра *a* средний период системы увеличивается, и временной ряд приобретает более хаотический характер.

При удалении от точки глобальной бифуркации первые показатели Херста приближаются к общему значению, что говорит о стабилизации общих свойств системы и, принимая во внимание хаотичное поведение системы, отсутствии устойчивых периодических циклов.

При большом укрупнении R/S анализ показывает, что система значительно меняет свой тип поведения в зависимости от значения параметра *a,* что не соответствует действительности. Поэтому делаем вывод, что данный тип поведения системы является наиболее сложным для R/S анализа, т.к. даже малое изменение в управляющем параметре влияет на поведение хаотического ряда (рис. 6).

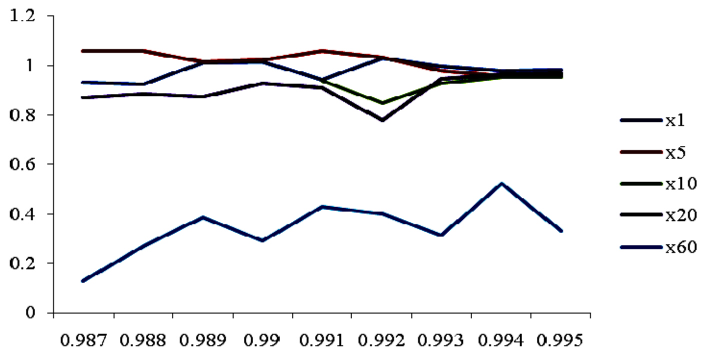


Рисунок 6 – Первые показатели Херста для различных значений *a* и укрупнений

4 Переход от хаоса к порядку (a = 1,02 – 1,1)

Рассмотрим поведение системы при переходе от хаоса обратно к порядку через синхронизацию частот. Бифуркационная диаграмма рассматриваемого промежутка представлена на рис. 7.

При изучении второго показателя Херста обратим внимание на его значительное падение при переходе от хаоса к порядку и постепенное увеличение при уменьшении количества разнородных частот, т.е. при их синхронизации. Это соотносится с наблюдением, приведенным ранее, что увеличение второго показателя Херста является признаком увеличения упорядоченности системы.

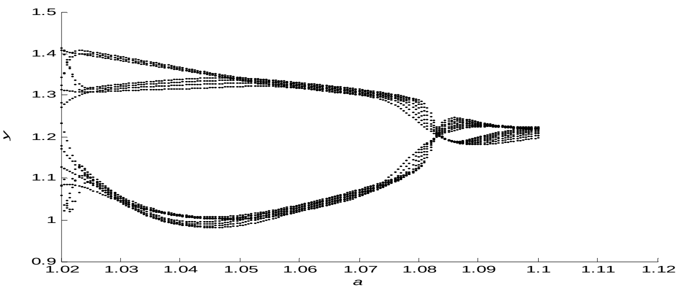


Рисунок 7 – Второй показатель Херста при различных значения *a*

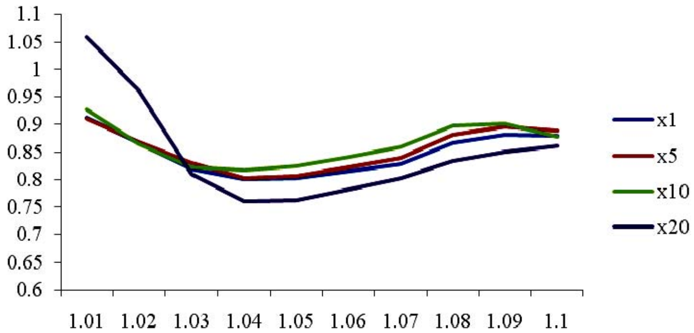


Рисунок 8 – Вторые показатели Херста для различных значений *a* и укрупнений

При анализе вторых показателей Херста отметим их неизменность при укрупнении данных с незначительным уменьшением при 20-кратном укрупнении (рис. 8). Это говорит о высокой устойчивости данного режима системы относительно редких выборок. Однако при 60-кратном укрупнении анализ системы с помощью R/S метода, как и для предыдущих периодов, не является показательным: система теряет информацию о своем характере поведения. R/S анализ при редких выборках может быть полезен для общей характеристики системы, т.е. её близости к периодическому либо к хаотическому режиму. При большом разбросе хвоста графика R/S анализа большая вероятность, что система близка к периодическому режиму и, наоборот, вытянутость графика и показатель Херста, значительно больше 0 говорит о хаотическом режиме системы.

Выводы

В работе были рассмотрены фундаментальные свойства и проведен R/S анализ уравнения возмущенного осциллятора Ван дер Поля как прототипа модели динамического поведения сложных экономических систем. Данная система объединяет в себе свойства мультистабильности (сосуществования аттракторов), мультимасштабности и перемежаемости периодических и хаотических режимов. Выбор данной модели для исследования был продиктован её относительной математической простотой, богатым разнообразием свойств и широким интересом со стороны экономистов. Основное внимание данной работы было направлено на изучение свойств показателей Херста для различных режимов системы.

Разреживание данных или, в экономических терминах, увеличение горизонта инвестирования обычно приводит к падению второго показателя Херста. Однако если система приближается к периодическому режиму – разреживание данных изменяет показатель Херста синхронизированно (на пропорционально одинаковую величину относительно всех укрупнений) и незначительно снижает его. Существует две возможности исчезновения второго показателя Херста:

1) он сливается с первым показателем Херста. Данное явление наблюдалось при периодическом режиме системы;

2) его значение становится равным или близким к 0. То есть график в логарифмических координатах становится параллельным оси абсцисс. Данное явление наблюдалось при кризисе слияния аттракторов, когда система теряет память о периодическом режиме и остается только средний период системы, отображаемый срывом основного тренда (в логарифмических координатах) или первого показателя Херста.

В рамках исследования замечено, что при определенной степени укрупнения выборки становится практически невозможно определить характер поведения системы. Показатели Херста становятся меньше 0,5 (даже при изначально периодической системе) и единственным фактором, указывающим на периодический или хаотический режим, становится разброс точек в логарифмическом масштабе. При периодическом режиме он намного больше и напоминает облако с показателями Херста, близкими к 0, тогда как при хаотическом цилиндр с показателями Херста больше 0, но меньше 0,5.

В заключение отметим, что характеристики нелинейных динамических свойств экономических временных рядов, полученные R/S анализом, могут быть только первым шагом, чтобы понять поведение экономических систем. И только применение комплексного системного подхода может помочь при прогнозировании, принятии стратегических решений и планировании долгосрочной политики.

Литература

1. Goodwin R.M. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles / Goodwin R.M. – 1951. – Vol. 19. Econometrica. – P. 1-17.
2. Chian A.C.-L. Complex Systems Approach to Economic Dynamics / Chian A.C.-L. // Springer : Lecture Notes In Economics And Mathematical Systems 592. – 15, 30. – P 42-43.
3. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике / Петерс Э. – М. : Интернет трейдинг, 2004.

Literatura

1. Goodwin R. M. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. Econometrica. Vol 19. 1951. P 1-17
2. Chian A. C.-L. Springer: Lecture Notes In Economics And Mathematical Systems 592. P 15, 30, 42-43
3. Peters E. Fraktal'nyj analiz finansovyh rynkov. Primenenie teorii haosa v investicijah i ekonomike. M.:Internet trejding. 2004

A.K. Lopatin, K.S. Yevdokimov

The Use of the R / S Analysis for Study of Deterministic, Chaos on the Example of the Perturbed Van der Pol Oscillator

The study is based on the use of the R / S analysis for the numerical solution of van der Pol equation to study the fundamental properties of complex economic systems that exhibit multi-scale and multistable behavior, as well as the coexistence of order and chaos, depending on changes of the control parameter. The work accents on the study of the Hurst exponent behavior at different chaotic modes and levels of investment. The possibilities of R / S analysis of recognition of the behavior of the system are studied.

Статья поступила в редакцию 22.06.2011.